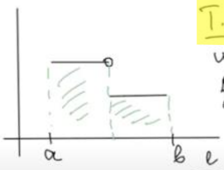
Опр. 2 Выражение $\omega_k = M_k - m_k$ наз-ся <u>колебанием</u> ф-ции f на $[x_{k-1}, x_k]$.



Т.3 Пусть f ограничена на $[a,b]$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдётся конечная система $\{I_j\}_{j=1}^{\ell}$ интервалов, покрывающих все точки разрыва f на $[a,b]$, такая, что $\sum\limits_{j=1}^{\ell} |I_j| < \varepsilon$. Тогда $f \in R[a,b]$.

Д-во: Возьмем $\varepsilon > 0$.

Пусть $\{I_j\}_{j=1}^{\ell}$ покрывают все точки разрыва, $\sum\limits_{j=1}^{\ell} |I_j| < \dfrac{\varepsilon}{\underbrace{2(M-m)}_{>0}}$

(если $M = m$, то f - постоянна $\Rightarrow$ интегр-ма). Тогда

$[a,b] \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\ell} I_j = \bigcup\limits_{j=1}^{r} \mathcal{J}_j$, где $\mathcal{J}_j$ - отрезки; $r \leq \ell + 1$.

На каждом из отрезков $\mathcal{J}_j$ ф-ция f непр-на $\Rightarrow$ р/н

$\Rightarrow \exists \delta_j(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x', x'' \in \mathcal{J}_j$, $|x' - x''| < \delta_j$: $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$

Положим $\delta = \min\limits_{1 \leq j \leq r} \{\delta_j\}$ и разобьем каждый из отрезков $\mathcal{J}_j$ разб-ем T_j, $\Delta_{T_j} < \delta$.

Пусть $T = \bigcup\limits_{j=1}^{r} T_j \cup \{a,b\}$ - разб-е $[a,b]$. Тогда

$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = \sum\nolimits_1 \overset{<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}{\omega_k} \Delta x_k + \sum\nolimits_2 \overset{\leq M-m}{\omega_k} \Delta x_k <$$

как в т.2

$\sum_1$ — по тем отрезкам разб-я, к-рые вошли в $\cup \mathcal{J}_j$; $\sum_2$ — остальные

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k + (M-m) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell} |I_j|}_{< \frac{\varepsilon}{2(M-m)}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow f \in R[a,b]$ (т.1) ч.т.д.

Т.4 Пусть f определена и монотонна на $[a,b]$. Тогда $f \in R[a,b]$.

Д-во: проведем для случая, когда $f \nearrow$.

Если $m = M$, то $f = const \Rightarrow$ инт-ма.

Пусть $m < M$. Из монот-ти $\Rightarrow m = f(a)$, $M = f(b)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$; обозначим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Тогда

$$\forall T,\ \Delta_T < \delta:\ S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(f(x_k) - f(x_{k-1}))}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\Delta x_k}_{<\delta} < \underbrace{\delta}_{=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}} \underbrace{(f(x_1) - f(a) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \ldots + f(b) - \cancel{f(x_{n-1})})}_{= f(b) - f(a)} = \varepsilon.$$

ч.т.д.

Опр. 1 Функция f <u>удовлетворяет условию Липшица</u> на отрезке $[a,b]$, если $\exists C > 0$, т.ч. $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C \cdot |x_1 - x_2|.$$

Пишут: $f \in Lip[a,b]$.

Т.1 Пусть ф-ция $\varphi: [\alpha, \beta] \xrightarrow{\text{на}} [a,b]$, $\varphi \in R[\alpha, \beta]$; $f \in Lip[a,b]$. Тогда $f(\varphi) \in R[\alpha, \beta]$.

Д-во: $\varphi \in R[\alpha, \beta] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists T = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ - разбиение $[\alpha, \beta]$: $S_\varphi(T) - s_\varphi(T) < \dfrac{\varepsilon}{C}$, где C - постоянная из усл-я Липшица для f.

Пусть $t', t'' \in [t_{k-1}, t_k]$, тогда

$$|f(\varphi(t')) - f(\varphi(t''))| \leq C \cdot |\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq C \cdot (\tilde{M}_k - \tilde{m}_k),$$

где $\tilde{M}_k = \sup\limits_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} \varphi(t)$, $\tilde{m}_k = \inf\limits_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} \varphi(t)$

$\Rightarrow M_k - m_k \leq C \cdot (\tilde{M}_k - \tilde{m}_k)$, где $M_k = \sup\limits_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} f(\varphi(t))$,

$m_k = \inf\limits_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} f(\varphi(t))$. Отсюда

$$S_{f(\varphi)}(T) - s_{f(\varphi)}(T) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta t_k \leq C \cdot \sum_{k=1}^{n} (\tilde{M}_k - \tilde{m}_k) \Delta t_k =$$

$$= C \cdot (S_\varphi(T) - s_\varphi(T)) < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon \Rightarrow f(\varphi) \in R[\alpha, \beta].$$

Примеры: 1) $f(x) = x^2 \in Lip[a,b]$:

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \leq \underbrace{2\max\{|a|, |b|\}}_{= C} \cdot |x_1 - x_2|$$

2) $f(x) = |x| \in Lip[a,b]$:

$$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2| \qquad C = 1$$

$|x_1| \leq |x_1 - x_2| + |x_2|$

$|x_2| \leq |x_1 - x_2| + |x_1|$